



## **Análisis de parámetros de influencia en la definición de trayectorias 4D**

**Entregable 5 (E5). Globalización de la red. Introducción a los sistemas multi-estado y cadenas de Markov**

## Hoja de Identificación del documento

Título:	Análisis de parámetros de influencia en la definición de trayectorias 4D. Entregable 5 (E5). Globalización de la red. Introducción a los sistemas multi-estado y cadenas de Markov
Código:	E5
Fecha:	Enero 2018
Fichero:	N.A.

Autor:	
Revisor:	Fernando Gómez Comendador
Aprobado:	N.A.

Versiones:			
Numero	Fecha	Autor	Comentarios
01	19 / 01 / 2018	David Álvarez Álvarez Pablo González García	
02	25 / 01 / 2018	Álvaro Rodríguez Sanz	
03	02 / 03 / 2018	David Álvarez Álvarez Álvaro Rodríguez Sanz	Correcciones resultantes de la reunión técnica de ISDEFE.

## Resumen Ejecutivo

El objetivo de este documento es, por un lado, ampliar el modelo causal desarrollado en el Entregable 4, y, por otro lado, plantear un modelo de análisis de la degradación de la trayectoria.

Después de haber evaluado las relaciones e interdependencias entre los factores que afectan a la trayectoria final de la aeronave con un modelo causal basado en Redes Bayesianas, se ha ampliado este modelo a todos los tramos de la Trayectoria 4D planteada. Extrapolar el análisis a la trayectoria global permite conocer las relaciones entre los parámetros en diferentes instantes del crucero, así como detectar influencias cruzadas entre estos parámetros y las ventanas de tiempo.

El siguiente paso del proyecto es analizar la degradación de la trayectoria. El desarrollo de un modelo que permita cuantificar esta degradación y que permita plantear tiempos de actualización para la trayectoria en función de esta degradación. Por ello, en este documento se hace una introducción teórica de dos metodologías que ayudarán a desarrollar el modelo: Cadenas de Markov y Sistemas Multi-estado. Además, se incluye un planteamiento inicial del modelo.

## Índice de Contenidos

1	INTRODUCCIÓN .....	6
2	GLOBALIZACIÓN DE LA RED .....	7
2.1	ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD .....	12
2.1.1	Intensidad de las relaciones de la red de causalidad .....	12
2.1.2	Influencia de las variaciones del Take-Off Weight .....	13
2.2	PLANIFICACIÓN DE LA TRAYECTORIA EN FASE ESTRATÉGICA .....	15
2.2.1	Evolución de la ventana de paso con el tiempo .....	15
3	INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS MULTI-ESTADO .....	18
3.1	Sistemas multi-estado: principales definiciones y propiedades [2] .....	18
3.2	Modelo genérico de MSS .....	19
4	CADENAS DE MARKOV .....	22
4.1	Procesos estocásticos .....	22
4.2	Cadenas de Markov [3] [4] .....	23
5	PLANTEAMIENTO INICIAL DEL MODELO .....	25
6	CONCLUSIONES .....	30
7	REFERENCIAS .....	31

## TABLA DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1: Red bayesiana – Interdependencias .....	7
Ilustración 2. Tiempos de paso para cada punto de control ajustados a una distribución normal.....	9
Ilustración 4 : Ampliación de la red – Red Global .....	10
Ilustración 5: Trayectoria completa .....	11
Ilustración 9. Evolución ventana de paso con el tiempo - Airbus A320. ....	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
Ilustración 10. Evolución ventana de paso con el tiempo – Boeing 737. ....	17
Ilustración 11: Ejemplo cadenas de Markov.....	24
Ilustración 12: Vector estado.....	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
Ilustración 13: Parámetros de influencia .....	26
Ilustración 14: Tabla de intervalos .....	28
Ilustración 15: Distribución de los estados .....	29

## 1 INTRODUCCIÓN

---

Dentro de la explotación del modelo de predicción de trayectorias 4D desarrollado se encuentra la aplicación de las redes bayesianas para el análisis de las dependencias entre los factores o variables que componen el modelo. Para analizar las relaciones inter-funcionales entre los parámetros definidos, se elaboró una red de tipo bayesiana a partir de los obtenidos de la Simulación de Montecarlo. Esta red permitía conocer, en probabilidad, la influencia de los parámetros en la ventana de paso. Además, la herramienta utilizada para la elaboración de la red bayesiana permitía realizar el análisis inverso, es decir, fijando la ventana de paso, estimar los rangos de variabilidad donde se deben encontrar los parámetros de entrada para cumplir con los requisitos de la ventana de paso. Esta red se elaboró para los puntos de control definidos en el Entregable 4 y se estudió de forma individual y aislada.

Después de este estudio aislado de cada punto, y siguiendo con la generalización del modelo a toda la trayectoria 4D, se extrapolará, de forma global, a otros puntos de la trayectoria. La globalización de la red causal se realizará para cada tramo de la fase crucero del modelo desarrollado, obteniendo así una red que permita conocer la influencia de los parámetros, de diferentes instantes del crucero, en los parámetros futuros y en las ventanas de tiempo posteriores. Además, se podrá realizar el planteamiento inverso, fijando parámetros objetivos, ver las probabilidades en los parámetros precedentes.

La siguiente fase del proyecto es el análisis de la degradación de la trayectoria 4D y la definición de un tiempo de actualización. Para ello, se introducirá dos metodologías para llevar a cabo este estudio. Estas dos metodologías son: Sistemas Multi-estado y Cadenas de Markov. Se hará una introducción teórica de cada una de ellas, mostrando el desarrollo que se utilizará en su futura aplicación.

Finalmente, se esbozará el planteamiento inicial del modelo a utilizar en base a las dos metodologías introducidas en el apartado anterior. Este planteamiento, como se ha mencionado es un esbozo inicial que se adaptará a medida que avance el desarrollo del modelo.

## 2 GLOBALIZACIÓN DE LA RED

En el Entregable 4, se ha analizado la trayectoria de estudio en los dos checkpoints indicados, con el objetivo de observar la evolución de la aeronave a lo largo de las diferentes posiciones que ocupa. Debido al gran número de simulaciones que se ha realizado, es posible contar con una imagen cercana a la realidad. Además, el modelo desarrollado ha permitido extraer los valores de cada parámetro en cada uno de los checkpoints elegidos.

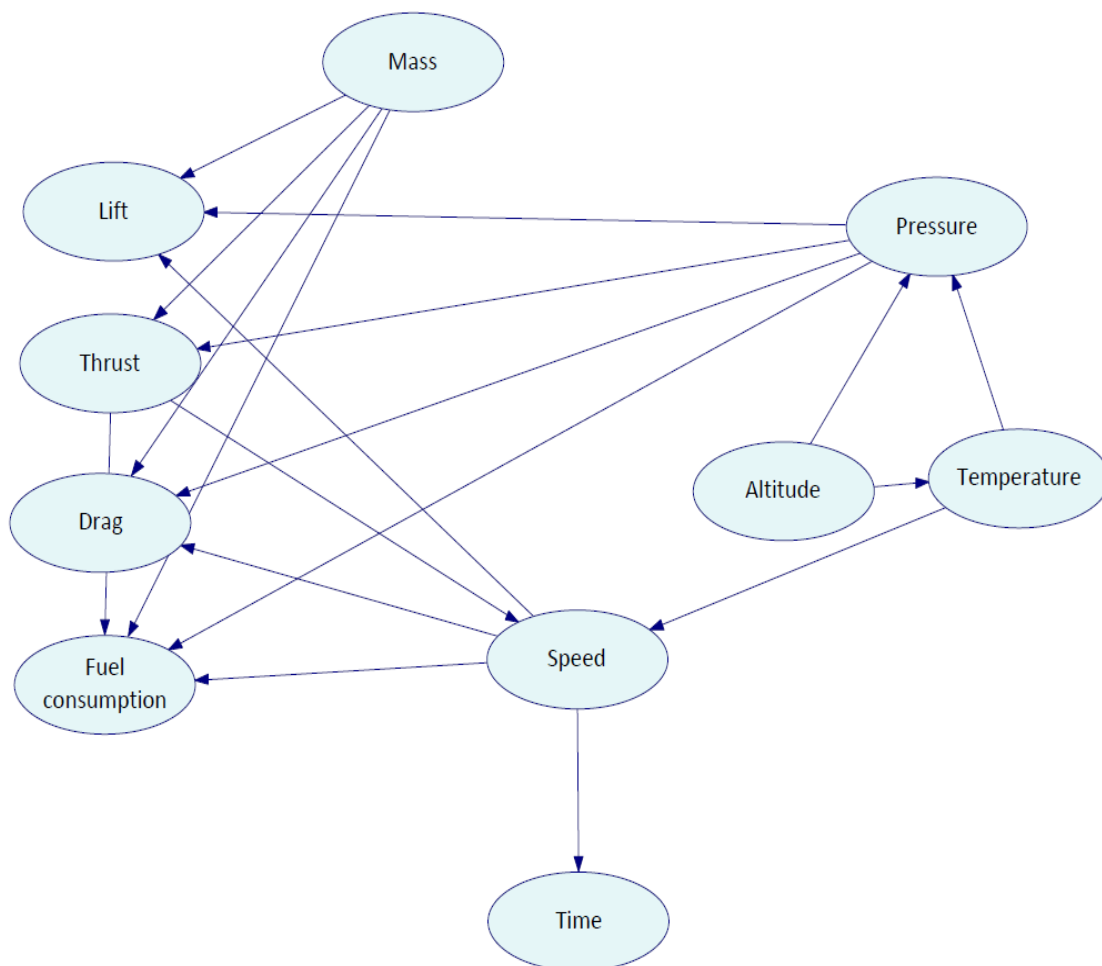


Ilustración 1: Red bayesiana – Interdependencias

La elevada cantidad de simulaciones permite ordenar los valores obtenidos para cada parámetro según una distribución que lo define. A su vez, se han interrelacionado las distribuciones de cada parámetro en estos puntos de análisis con el fin de establecer las interdependencias que se dan entre ellos. Con esta información se puede conocer qué parámetros son más relevantes [1] o cuáles se pueden modificar con el propósito de cumplir con la trayectoria inicial definida. Estas interdependencias, Ilustración 1 o relaciones causales entre los parámetros, se contemplaron en una red de causalidad en la que las variaciones de unos parámetros afectaban directamente, en mayor o menor grado, a otros parámetros.

El siguiente paso consiste en crear una nueva red que contemple la trayectoria de una manera más global, es decir, se trata ahora de aumentar el número de puntos de análisis de la trayectoria. En el caso anterior se eligieron dos checkpoints, situados en posiciones cercanas al inicio y al final de la trayectoria respectivamente. En este caso se establecerán cinco checkpoints a lo largo de la trayectoria, coincidiendo cada uno en cada una de las secciones en que se divide la trayectoria. Así, cada uno de los checkpoints elegido actuará a modo de representante de todos los puntos recogidos en la sección en la que se encuentra situado. Esto permitirá conseguir un análisis del cumplimiento de la trayectoria inicial más exhaustivo y detallado que en el estudio anterior.

Hasta ahora se habían realizado dos redes para cada punto de análisis: una red fijando la posición y una red fijando el tiempo. En este apartado se considerará una nueva red global fijando la posición, ya que se ha valorado que tendrá una mayor aplicabilidad que la red en la que se fija el tiempo de paso por un punto. Esto se debe a que, con el nuevo concepto operacional, se buscará dirigir o ajustar la nueva dimensión introducida (el tiempo) al resto de dimensiones, indicando ventanas de paso por los distintos puntos de una trayectoria.

Cada uno de los puntos de análisis o checkpoints que se han definido se encuentran situados en cada una de las secciones en que se ha dividido la trayectoria. Por tanto, la toma de datos se ha realizado en los siguientes puntos, medidos en millas náuticas:

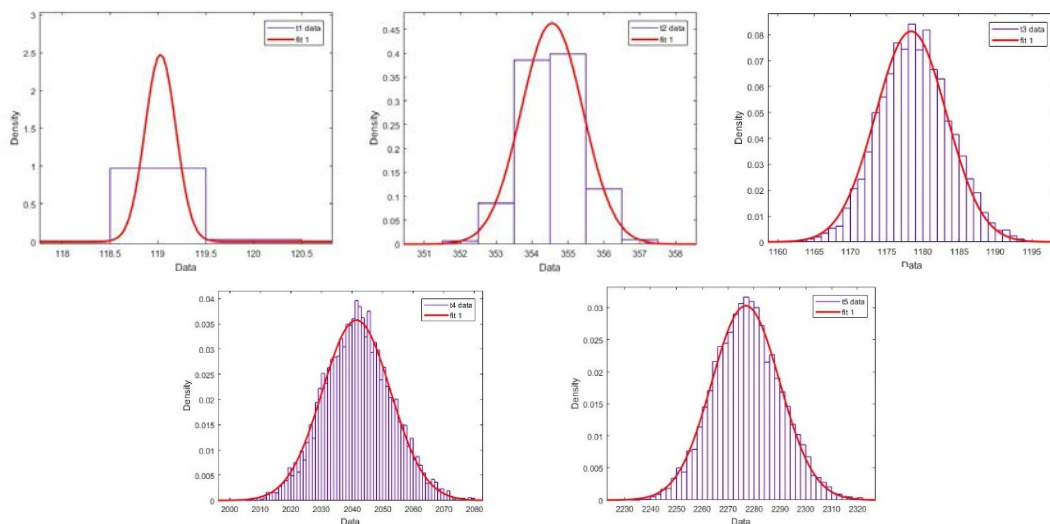
- Checkpoint 1 → 15NM
- Checkpoint 2 → 45NM



- Checkpoint 3 → 150NM
- Checkpoint 4 → 260NM
- Checkpoint 5 → 290NM

Concretamente, el checkpoint 1 se encuentra en la primera fase de vuelo estabilizado, el checkpoint 2 en la fase de ascenso de cambio de nivel, el checkpoint 3 se localiza en la segunda fase de vuelo estabilizado, el checkpoint 4 está en la fase de descenso de cambio de nivel y el checkpoint 5 se ubica en la tercera y última fase de vuelo estabilizado. Se trata, de esta manera, de incluir en el estudio puntos representativos de la trayectoria en los que puedan surgir variaciones importantes y que en el estudio anterior de dos checkpoints podrían no estar contempladas.

En la Ilustración 2 se presentan los tiempos de paso obtenidos para cada punto de control, donde se observa un tamaño de ventana de paso mayor conforme aumenta el tiempo que la aeronave ha estado volando la trayectoria.



**Ilustración 2. Tiempos de paso para cada punto de control ajustados a una distribución normal.**

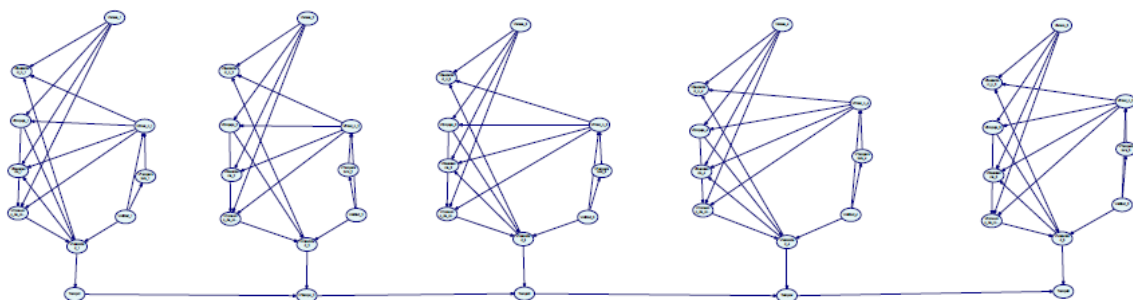
Esta nueva organización posibilita un control más continuado sobre los posibles cambios que se pueden dar a lo largo de la trayectoria, ya que además de aumentar el número de checkpoints, se encuentran

distribuidos dentro de las diferentes secciones de la trayectoria de vuelo y entre ellos existe una distancia menor.

Se pretende añadir una condición nueva en la red global. Dado que anteriormente solamente se estudiaban dos checkpoints por separado, no era necesario interrelacionarlos entre sí. Sin embargo, en la nueva red global, aparte de la realización de una red entre los parámetros propios de cada estado o checkpoint elegido, también se relacionarán estas cinco redes entre sí. Es decir, de cada checkpoint se obtendrá una red, de la cual se obtiene una ventana de tiempo en la cual la aeronave estará en el punto indicado. La nueva condición consiste en que la ventana de cada punto de paso vendrá condicionada por la ventana de paso del punto anterior.

Con esto se busca la representación fiel de la realidad, ya que, si una aeronave incumpliese o se desviase en cierto modo de la trayectoria inicial, continuará haciéndolo a lo largo del tiempo. Por tanto, una desviación en un punto de la trayectoria implicará desviaciones futuras a lo largo de la misma. Por eso, el tiempo de paso por un punto afectará al tiempo de paso por el punto siguiente, haciendo que el punto de paso final esté condicionado por los puntos de paso anteriores.

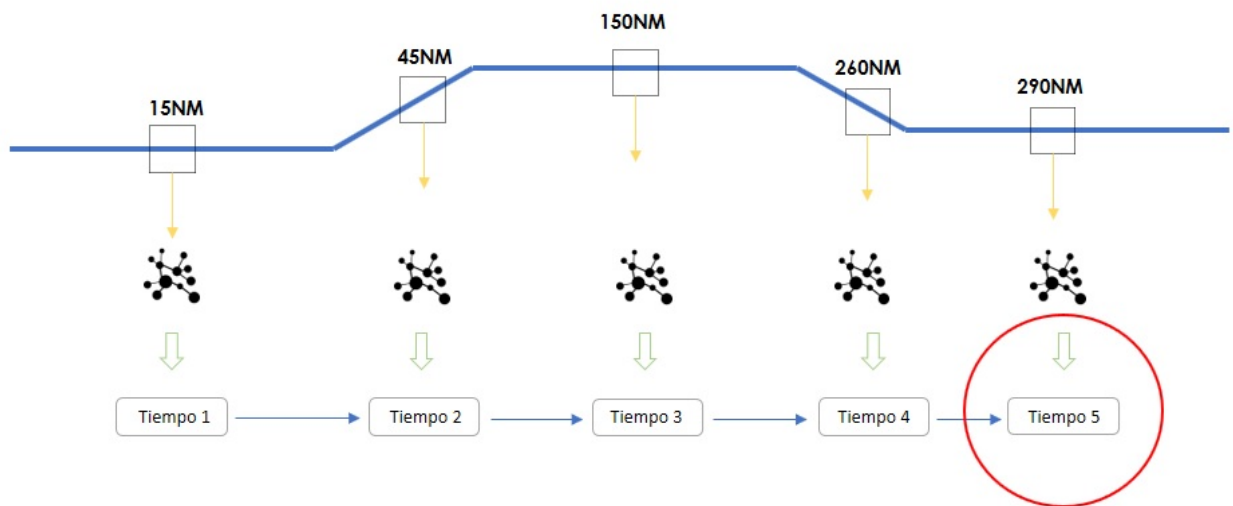
La aeronave tenderá a desviarse en algún punto de la trayectoria, por lo que es importante conocer la variación que se produce con la finalidad de tomar medidas correctoras y hacer que la trayectoria se adecúe en gran medida a la trayectoria inicial.



**Ilustración 3 : Ampliación de la red – Red Global**

Por todo esto, al evaluar un punto de cada sección de la trayectoria, Ilustración 2, a modo de muestra por cada cambio de actuación de la aeronave (vuelo estabilizado, cambio de nivel ascendente, vuelo

estabilizado, cambio de nivel descendente, vuelo estabilizado), se tiene un estudio más completo que permite aumentar la fiabilidad de la red global, se ofrece una visión más global de la trayectoria pudiendo observar de una manera más pormenorizada cada característica de la trayectoria y se presenta una evolución de la trayectoria y sus variaciones de una forma más particularizada, conociendo cómo varía cada parámetro de un checkpoint, Ilustración 3, al siguiente.



#### Ilustración 4: Trayectoria completa

Además de conocer la evolución de la trayectoria conforme va desarrollándose el vuelo, es decir, observar las variaciones en tiempos de paso por un punto o las desviaciones de parámetros que afectan directamente al cumplimiento de la trayectoria, se pueden extraer conclusiones en cuanto a los puntos o tramos de la trayectoria en los que se producen unas mayores desviaciones y a qué hechos son debidas. Esto podría conllevar una medida que haría que la aeronave tuviera que refrescar su información llegado a ese tiempo de vuelo en el cual las desviaciones se van a expandir o, concretamente, revisar los parámetros que más afecten al cumplimiento de la trayectoria en el momento en que estas desviaciones se salgan de unos valores aceptables en ese punto, para corregirlos y adaptarse de nuevo a la trayectoria inicial.

## 2.1 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

El análisis de sensibilidad mide en qué grado pueden llegar a afectar variaciones relativamente pequeñas en los valores de los parámetros a los resultados de un modelo. Este análisis sirve para comprobar la lógica interna de una red y ayuda a aprender más acerca de su funcionamiento. Por otro lado, el análisis de sensibilidad servirá para definir la importancia de cada parámetro en el conjunto de la trayectoria.

Además, servirá para detectar si el modelo está excesivamente parametrizado, lo que ocurre si existen parámetros a los que el modelo resulta insensible. En ese caso sería necesario eliminar algunos para simplificar el modelo.

### 2.1.1 Intensidad de las relaciones de la red de causalidad

Para analizar la intensidad de las relaciones entre los parámetros se ha fijado como "Target" o parámetro objetivo el tiempo de llegada de las aeronaves.

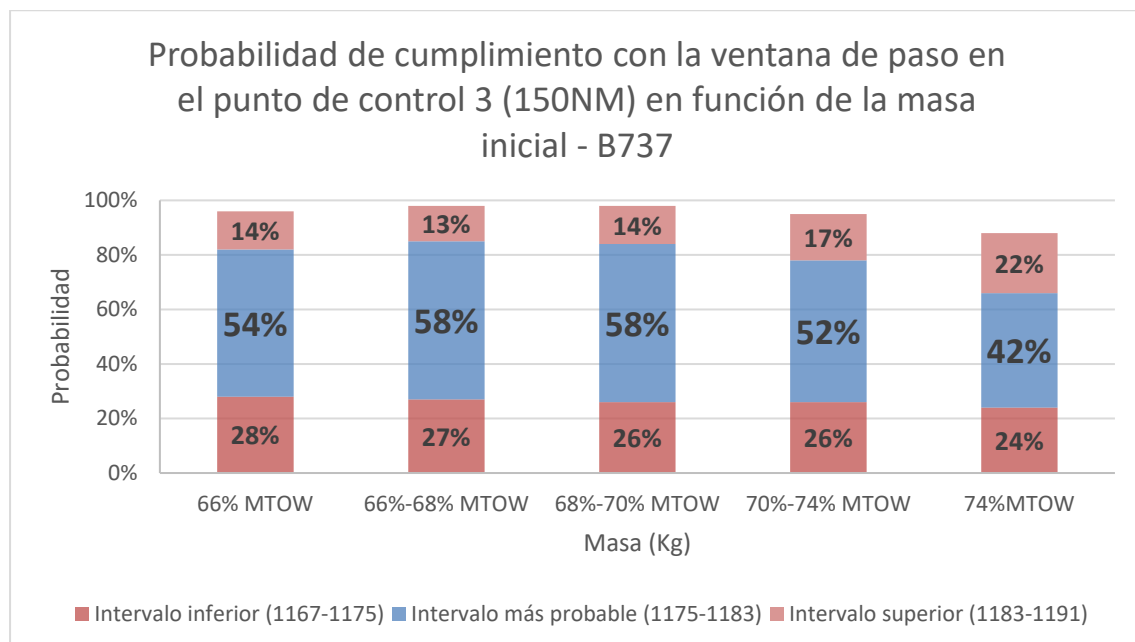
Del análisis de la fortaleza de las relaciones entre los parámetros se deduce que, en el punto de control 5, la intensidad de las relaciones es más fuerte que en el punto de control 1. Dentro de cada punto de control, se calcula el tiempo de paso de la aeronave por ese punto y, ese tiempo afecta a los siguientes tiempos de la red. Por tanto, el tiempo del punto de control 4 influye con gran intensidad sobre el tiempo del punto de control 5, dado que dentro del punto de control 4 están incluidas todas las influencias de los puntos de control anteriores. Esto convierte al tiempo del punto de control anterior en un factor de influencia importante en el cumplimiento con la trayectoria inicial planificada. Según las redes de intensidad de las relaciones entre parámetros, se deduce que la masa, la velocidad y el empuje de la aeronave son los factores que mayor influencia tienen en el tiempo de llegada de la aeronave al punto de control indicado. A esto hay que sumar el consumo de combustible, que está estrechamente relacionado con los tres parámetros anteriores.

## 2.1.2 Influencia de las variaciones del Take-Off Weight

### Masa (~TOW)

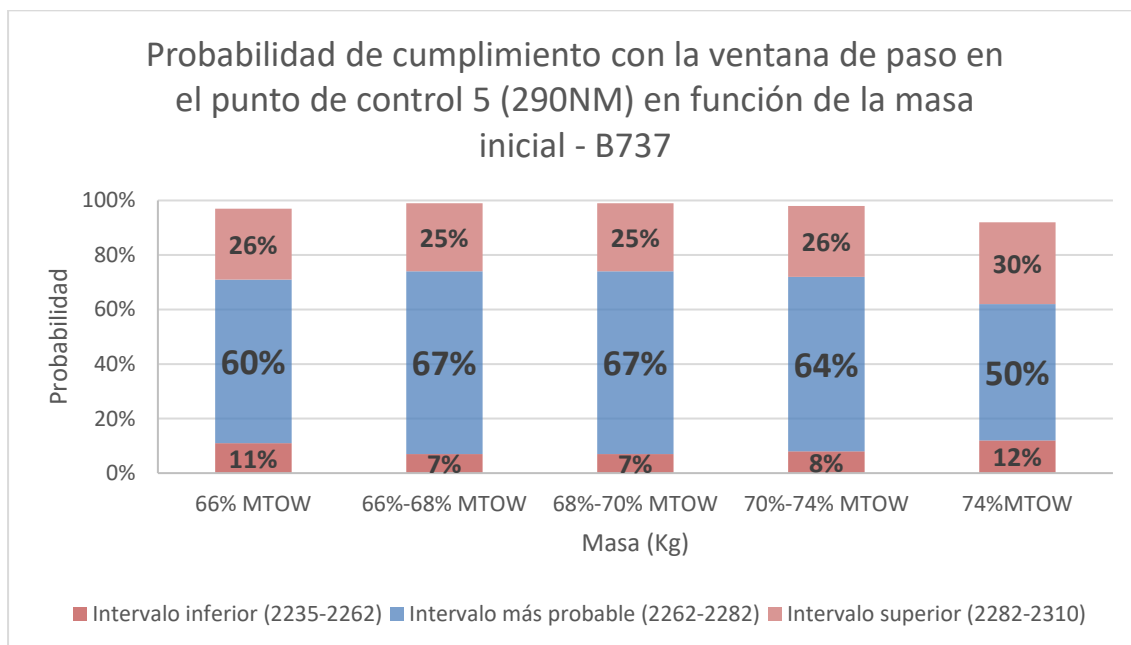
Se trata ahora de analizar la influencia de la masa inicial de la aeronave sobre el cumplimiento de la ventana de paso durante la trayectoria. En las simulaciones se habían dado valores aleatorios a la masa inicial de la aeronave siendo  $0.7 \cdot \text{MTOW}$  el valor óptimo del que se partía. En este caso se han establecido cinco rangos con valores de masas iniciales y se analiza con qué probabilidad se alcanzará la ventana de paso fijada a partir de la masa inicial que se ha elegido para efectuar el vuelo.

Se han elegido dos puntos de la trayectoria para el análisis por sus características. Se ha elegido el punto en el que la aeronave ha recorrido 150NM y el punto en el que la aeronave ha recorrido 290NM. Esto es porque estos dos puntos se encuentran situados después de un cambio de nivel de vuelo ascendente y de un cambio de nivel de vuelo descendente respectivamente, por lo que se podrá evaluar de esta forma la influencia que tiene para el cumplimiento de una aeronave la introducción de cambios de nivel de vuelo en la trayectoria.



**Ilustración 5: Probabilidad de cumplimiento con la ventana de paso en el punto de control 3 (150NM) en función de la masa inicial - B737**

En ambas ilustraciones (Ilustración 5 e Ilustración 6), la parte de cada barra que está en color azul muestra la probabilidad de que la aeronave se encuentre en el intervalo más probable, frente a la parte que está en naranja que representa la probabilidad de que la aeronave se encuentre en el intervalo inferior o superior.



**Ilustración 6: Probabilidad de cumplimiento con la ventana de paso en el punto de control 5 (290NM) en función de la masa inicial - B737**

Comparando ambas gráficas (Ilustración 5 y 6) se puede deducir que el nivel de cumplimiento es mayor en la segunda gráfica (290NM recorridas) que en la primera (150NM recorridas) y esto indica que un cambio de nivel de vuelo ascendente produce mayor incertidumbre que un cambio de nivel de vuelo descendente.

Fijando la atención en el intervalo inferior (las aeronaves que llegan antes del óptimo), la probabilidad de cumplimiento es mayor a los 150NM que a los 290NM, donde es mayor la parte relativa al intervalo superior (las aeronaves llegan más tarde del intervalo más probable).

Por último, destacar que, para conseguir el mayor cumplimiento del intervalo de tiempo más probable, la masa inicial del Boeing 737-900ER se tendría que encontrar entre los 56.456kg y los 59.738kg.

## 2.2 PLANIFICACIÓN DE LA TRAYECTORIA EN FASE ESTRATÉGICA

### 2.2.1 Evolución de la ventana de paso con el tiempo

De las redes bayesianas elaboradas también es posible analizar los valores obtenidos en relación a los tiempos de llegada a los puntos de alcance fijados. Se han representado para los dos tipos de aeronaves, Boeing 737 y Airbus A320, las ventanas de paso que se darían en cada uno de estos puntos.

Se ha representado, en las siguientes gráficas, el intervalo más probable que debería tener la ventana de paso a su paso por cada punto y la desviación de la ventana de paso que podría considerarse tolerable. En el caso de la aeronave Boeing 737 en el tiempo 3 (a 150NM), la ventana de paso sería de 8 segundos, considerándose tolerable una desviación de 8 segundos hacia arriba (la aeronave llega más tarde) y 8 segundos hacia abajo (la aeronave llega antes). Por tanto, la ventana de paso sería de 24 segundos en el punto definido como punto de control 3.

Para la definición de ventana de paso tolerable se mantiene el criterio desarrollado en etapas anteriores del proyecto, considerando un nivel de confianza del 95% al determinar el intervalo temporal para localizar a la aeronave en el punto de control correspondiente.

### Aeronave Airbus A320

A continuación, se muestra la evolución de la ventana de paso con el tiempo para la aeronave Airbus A320 (Ilustración 7).

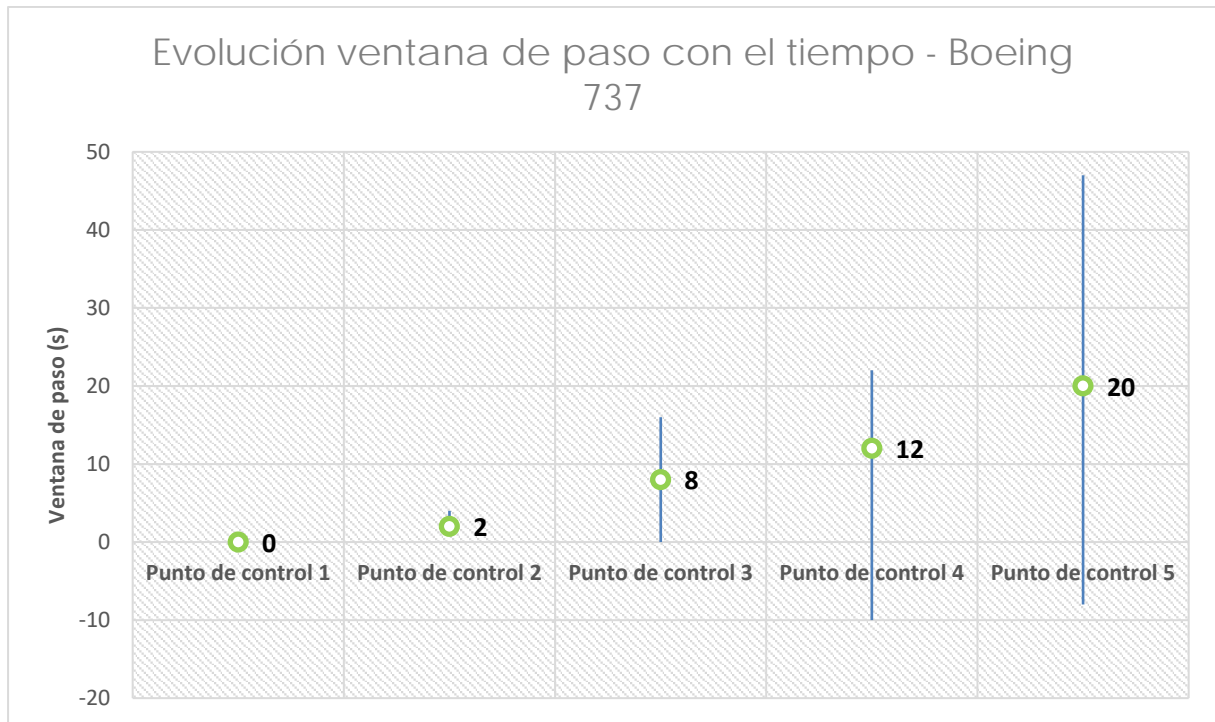


Ilustración 7: Evolución ventana de paso con el tiempo - Airbus A320.

### Aeronave Boeing 737-900ER

También se muestra la evolución de la ventana de paso con el tiempo para la aeronave Boeing 737-900ER (Ilustración 8).





**Ilustración 8. Evolución ventana de paso con el tiempo – Boeing 737.**

El valor que aparece en la gráfica en negrita es el tamaño de la ventana de paso, siendo la barra en azul la representación de las desviaciones en tiempo de esa ventana de paso.

Al comparar ambas gráficas se puede concluir que las ventanas de paso más probables para los dos tipos de aeronaves son idénticas hasta el punto de control 3, cambiando los valores en el punto de control 4 (12 segundos para el B737 y 18 segundos para el A320) y en el punto de control 5 (20 segundos para el B737 y 24 segundos para el A320). En cuanto al intervalo de tiempo tolerable, empieza a cambiar respecto de una aeronave a otra en el punto de control 3, con una diferencia de 3 segundos de una respecto a la otra (24 segundos el B737 y 21 segundos el A320).

Estas diferencias se pueden deber tanto a la aleatoriedad de los parámetros como a las diferentes actuaciones de las aeronaves para la ejecución de un vuelo.

## 3 INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS MULTI-ESTADO

---

### 3.1 Sistemas multi-estado: principales definiciones y propiedades [2]

Todo sistema técnico está diseñado para desempeñar sus funciones en un determinado medio o entorno. Muchos sistemas pueden llevar a cabo sus funciones con varios niveles de eficiencia que usualmente se denominan tasas de rendimiento. Un sistema que tiene un número finito de tasas de rendimiento se denomina sistema multi-estado (MSS). Normalmente, un sistema multi-estado está compuesto de elementos que a su vez pueden ser considerados como sistemas multi-estado. Un elemento es una entidad del sistema que no tiene más sub-divisiones. Esto no implica que el elemento no pueda estar constituido por partes, pero significa que, en un estudio de fiabilidad, estas se tomarán como un conjunto a la hora de realizar el estudio.

Actualmente, un sistema binario es el caso más simplificado de MSS con dos estados: funciona o no funciona.

Existen diferentes situaciones en las que los sistemas deben ser considerados sistemas multi-estado, como:

1. Un sistema que consista en diferentes unidades que tenga un efecto acumulativo sobre el rendimiento completo de del sistema tiene que ser considerado un sistema multi-estado. Ciertamente, la tasa de rendimiento del sistema depende de la disponibilidad de sus unidades, ya que un número diferente de unidades disponibles puede proporcionar diferentes niveles de rendimiento.
2. La tasa de rendimiento de los elementos que componen un sistema puede variar como resultado de su deterioración (fatiga, fallos parciales) o por causa de las condiciones ambientales. Fallos de elementos pueden conducir a la degradación del rendimiento del sistema completo

Las tasas de rendimiento de los elementos van desde el perfecto funcionamiento hasta el fallo completo. Los fallos que pueden conducir a una reducción del rendimiento de un elemento se denominan fallos parciales. Después de un fallo parcial, los elementos continúan operando con un rendimiento reducido,

y después de un fallo total, los elementos se inhabilitan y no cumplen con su función.

### 3.2 Modelo genérico de MSS

Para analizar el comportamiento de un sistema multi-estado uno tiene que saber las características de sus elementos. Cada componente del sistema  $j$  tiene  $k_j$  estados diferentes correspondientes a las tasas de rendimiento, representado el conjunto:

$$\mathbf{g}_j = \{g_{j1}, g_{j2}, \dots, g_{jk_j}\}$$

Donde:

$g_{ji}$  es la tasa de rendimiento del elemento  $j$  en el estado  $i$ ,

$$i \in \{1, 2, \dots, k_j\}$$

La tasa de rendimiento  $G_j$  del elemento  $j$  en cualquier instante de tiempo es una variable aleatoria que toma sus valores de  $g_j$ :  $G_j \in g_j$

Las probabilidades asociadas a los diferentes estados (tasas de rendimiento) del elemento del sistema  $j$  pueden ser representadas por el conjunto

$$\mathbf{p}_j = \{p_{j1}(t), p_{j2}(t), \dots, p_{jk_j}(t)\} \quad (1.1)$$

Donde

$$p_{ji} = Pr\{G_{ji} \in g_{ji}\} \quad (1.2)$$

Como en el caso de los sistemas binarios, las probabilidades de estado de los sistemas binarios, las probabilidades de estados de los elementos del MSS pueden interpretarse como las probabilidades de estado durante un tiempo fijo de tarea, las probabilidades de estado en un momento determinado, o las disponibilidades (en el caso de elementos binarios)

Tenga en cuenta que, dado que los estados de los elementos componen el grupo completo de eventos mutuamente excluyentes (lo que significa que el elemento siempre puede estar en uno y solo en uno de

los estados  $k_j \sum_{i=0}^{k_j} p_{ji} = 1$

La expresión (1.2) define el p.m.f. para una variable aleatoria discreta  $G_j$ . La colección de pares  $p_{ji}, g_{ji}, i = 0, 1, \dots, k_j - 1$ , determina completamente la distribución de probabilidad de rendimiento (PD) del elemento  $j$ .

Observe que el comportamiento de los elementos binarios (elementos con solo fracasos totales) también se puede representar por la distribución de rendimiento. En efecto, considerar un elemento binario  $i$  con un rendimiento nominal (tasa de rendimiento que corresponde a un estado completamente operable)  $g^*$  y la probabilidad de que el elemento está en el estado completamente operable  $p$ . Suponiendo que la tasa de rendimiento del elemento en un estado de fallo completo es cero, se obtiene su PD de la siguiente forma:

$$g_i = \{0, g^*\}, p_i = \{1 - p, p\}$$

Las PD se pueden representar gráficamente en forma de curvas acumulativas. En esta representación, cada valor de rendimiento  $x$  corresponde a la probabilidad de que el elemento proporciona una tasa de rendimiento que no es menor que este nivel:

$$Pr\{G_j \geq x\}$$

Para la comparación, los gráficos que representan el PD del elemento  $i$  binario y el elemento  $j$  con cinco estados diferentes se presentan en la siguiente figura. Observe que el PD discreto acumulado es siempre una función decreciente.

Cuando el MSS consta de  $n$  elementos, sus tasas de rendimiento se determinan de forma inequívoca por las tasas de rendimiento de estos elementos. En cada momento, los elementos del sistema tienen ciertas tasas de rendimiento correspondientes a sus estados. El estado de todo el sistema está determinado por los estados de sus elementos. Supongamos que todo el sistema tiene  $K$  diferentes estados y que  $g_i$  es toda la tasa de rendimiento del sistema en el estado de  $i$  ( $i \in \{0, \dots, K - 1\}$ ). La tasa de rendimiento de SMS es una variable aleatoria que toma valores del conjunto  $\{g_1, g_2, \dots, g_{k-1}\}$

$L^n = \{g_{11}, \dots, g_{1k_1}\} \times \{g_{21}, \dots, g_{2k_2}\} \times \dots \times \{g_{n1}, \dots, g_{nk_n}\}$  es el espacio de posibles combinaciones

de tasas de rendimiento para todos los elementos del sistema y  $M = \{g_1, \dots, g_k\}$  es el espacio de valores posibles la tasa de rendimiento para todo el sistema. Al transformar  $\phi(G_1, \dots, G_n): L^n \rightarrow M$ , que mapea el espacio de las tasas de rendimiento del elemento en el espacio de la tasas de rendimiento del sistema. Tener en cuenta que la función de la estructura del SMS es una extensión de una función de estructura binaria. La única diferencia está en la definición de los espacios de estado: la función de estructura binaria se asigna  $\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , mientras que en los MSS uno se ocupa de espacios mucho más complejos.

Ahora podemos definir un modelo genérico de sistema multi-estado. Este modelo debe incluir los procesos estocásticos de rendimiento

$$G_j(t), j = 1, 2, \dots, n$$

para cada elemento  $j$  del sistema, y la función estructura del sistema que produce el proceso estocástico corresponde con el *output* de rendimiento del sistema completo

$$G(t) = \phi(G_1(t), \dots, G_n(t))$$

## 4 CADENAS DE MARKOV

---

### 4.1 Procesos estocásticos

La teoría de los procesos estocásticos se centra en el estudio y modelización de sistemas que evolucionan a lo largo del tiempo, o del espacio, de acuerdo con unas leyes no determinísticas, esto es, de carácter aleatorio.

La forma habitual de describir la evolución del sistema es mediante sucesiones o colecciones de variables aleatorias. De esta manera, se puede estudiar cómo evoluciona una variable aleatoria a lo largo del tiempo. Por ejemplo, el número de personas que espera ante una ventanilla de un banco en un instante  $t$  de tiempo; el precio de las acciones de una empresa a lo largo de un año; el número de parados en el sector de hostelería a lo largo de un año.

La primera idea básica es identificar un proceso estocástico con una sucesión de variable aleatoria  $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  donde el subíndice indica el instante de tiempo (o espacio) correspondiente. Esta idea inicial se puede generalizar fácilmente, permitiendo que los instantes de tiempo en los que se definen las variables aleatorias sean continuos. Así, se podrá hablar de una colección o familia de variable aleatoria  $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ , que da una idea más exacta de lo que es un proceso estocástico.

Se tenía que una variable aleatoria  $X(s)$  es una función que va desde un espacio muestral  $S$  a la recta real, de manera que a cada punto  $s \in S$  del espacio muestral se le puede asociar un número de la recta real.

De este modo, la probabilidad de cada suceso de  $S$  se puede trasladar a la probabilidad de que un valor de  $X$  (*variable aleatoria*) caiga en un cierto intervalo o conjunto de números reales. Si a todo esto se le añade una dimensión temporal, se obtiene un proceso estocástico.

Una propiedad de especial importancia que poseen los caminos aleatorios (procesos estocásticos), es que sus valores en el  $n$ -ésimo paso solo dependen de los valores en el  $(n-1)$ -ésimo paso, y no de los anteriores. Esta propiedad conocida como propiedad markoviana es de gran importancia en el estudio de estos procesos, y en el estudio general de la teoría de procesos estocásticos.

## 4.2 Cadenas de Markov [3] [4]

En la teoría de la probabilidad, se conoce como cadena de Márkov o modelo de Márkov a un tipo especial de proceso estocástico discreto en el que la probabilidad de que ocurra un evento depende solamente del evento inmediatamente anterior. Esta característica de falta de memoria recibe el nombre de propiedad de Markov.

En matemáticas se define como un proceso estocástico discreto que cumple con la propiedad de Márkov, es decir, si se conoce la historia del sistema hasta su instante actual, su estado presente resume toda la información relevante para describir en probabilidad su estado futuro.

Una cadena de Márkov es una secuencia  $X_1, X_2, X_3, \dots$  de variables aleatorias. El dominio de estas variables es llamado espacio estado; el valor de  $X_n$  es el estado del proceso en el tiempo  $n$ . Si la distribución de probabilidad condicional de  $X_{n+1}$  en estados pasados es una función de  $X_n$  por sí sola, entonces:

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_2 = x_2, X_1 = x_1) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)$$

Donde  $x_i$  es el estado del proceso en el instante  $i$ . La identidad mostrada es la propiedad de Markov. Intuitivamente, se interpreta esta ecuación como que, dado el "presente" del proceso, el "futuro" es independiente del "pasado". Es decir, una cadena de Markov es una sucesión de variable aleatoria que "ven el pasado a través del último suceso".

La probabilidad de pasar del estado  $X_{n-1} = i$  al estado  $X_n = j$  viene dado por  $\gamma_{i,j}$ , donde  $n$  representa el número de transiciones. Las probabilidades de pasar de un estado a otro se pueden representar de forma conjunta mediante la matriz de transición  $\mathbf{P}$ .

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} & \dots & \gamma_{1,k} \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} & \dots & \gamma_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \gamma_{k,1} & \gamma_{k,2} & \dots & \gamma_{k,k} \end{pmatrix}$$

La probabilidad de que el sistema se encuentre en un estado particular dada  $n$  transiciones viene dada

por el vector:

$$\pi_n^T = [\pi_{1,n} \quad \pi_{2,n} \quad \cdots \quad \pi_{k,n}]$$

Siendo  $\pi_{k,n}$  la probabilidad de que el parámetro se encuentre en el estado  $k$  en la transición  $n$ . Las probabilidades de cada transición  $n$  se pueden encontrar de forma iterativa de la siguiente forma:

$$\pi_n^T = \pi_{n-1}^T \mathbf{P}$$

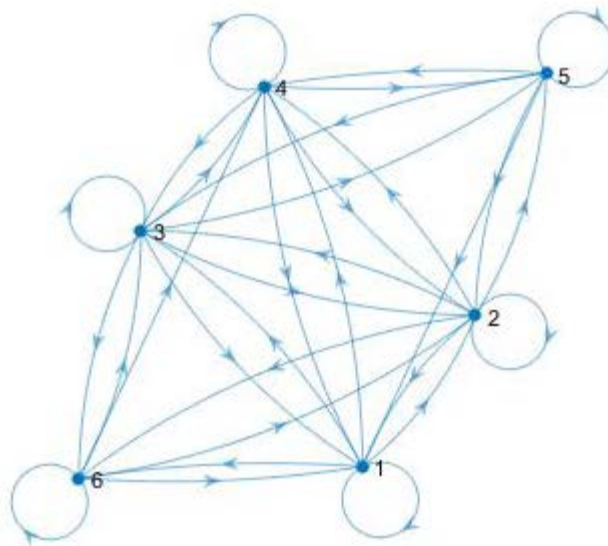


Ilustración 9: Ejemplo cadenas de Markov

La evolución aleatoria de una cadena de Markov queda completamente determinada por su matriz de transición  $\mathbf{P}$  y su distribución de densidad inicial  $x_0$ . Por lo tanto, el estudio de las cadenas de Markov es reducible al estudio algebraico de las propiedades de las matrices de transición.



## 5 PLANTEAMIENTO INICIAL DEL MODELO

---

A la hora de plantear el modelo se definirá la trayectoria 4D como el sistema a analizar. Dentro de este sistema, el rendimiento del mismo vendrá dado por los rendimientos de los elementos del sistema, que en este caso serán los diferentes parámetros que definen la trayectoria. Por lo tanto, hay que definir unos estados o tasas de rendimiento del sistema y unos estados o tasas de rendimiento para los elementos, estando estos inter-relacionados.

En esta fase se plantea el sistema (trayectoria 4 D) como un sistema con un vector estado, Ilustración 10, compuesto de tres estados: óptimo, aceptable y degradado

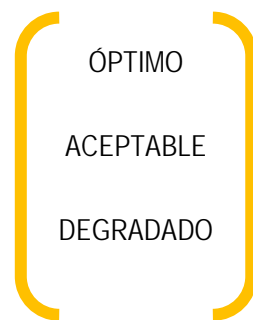


Ilustración 10: Vector estado

Estas tres tasas de rendimiento vendrán definidas a su vez por la de los elementos que forman el sistema (Trayectoria 4D).

Como ya se mencionó en los anteriores entregables, las variables, que se han tomado, que gobiernan el modelo de trayectoria planeado se dividen en los siguientes bloques:

En la Ilustración 11 se muestran todos los parámetros de influencia en la trayectoria, pero para obtener el vector estado no se van a utilizar todos ellos.



**Ilustración 11: Parámetros de influencia**

En la simulación de Monte Carlo se muestrean las siguientes variables de entrada: la masa de la aeronave, la temperatura, la presión, la densidad y el viento. El modelo estima las variables aerodinámicas y propulsivas a partir de la masa.

Las variables atmosféricas dependen de la altitud en el modelo de atmósfera estándar ISA, están modelizadas de acuerdo con el error de posición de los valores ideales que proporciona el modelo ISA. Se podría plantear una relación para ver en qué grado difiere. En este caso se ha escogido la

temperatura, pero también se podría escoger la presión. La densidad en el modelo planteado es una relación de las dos variables.

Del bloque gravitacional, la única variable que se tiene es la masa. Esta variable es importante al ser una de las que definen la configuración de vuelo del avión, pudiendo variar esta al comienzo de la operación.

De las variables aerodinámicas, en las simulaciones, la sustentación sigue una tendencia decreciente sin demasiadas variaciones a lo largo del tiempo. No ocurre lo mismo con la resistencia cuya evolución temporal presenta mayor variabilidad.

En cuanto al bloque propulsivo, hay dos variables, el empuje y el consumo de combustible. En las simulaciones se aprecia que el empuje se mantiene constante y entorno a un valor, no así el consumo de combustible. El consumo de combustible parece tener un carácter bastante aleatorio debido a las influencias de otras variables de su entorno.

Por último, las variables del movimiento de la aeronave son las salidas del modelo simulado, definiendo en cada caso las ventanas de paso. En el caso de la variable de la velocidad está incluido el viento como un error de la velocidad definido como una desviación estadística. Los errores de navegación y los producidos por la temperatura también se encuentran incluidos.

Según se enfoque el modelo, con una ventana de tiempo o una de posición, se podría definir otro vector. El primer planteamiento del modelo se realizará en función de la ventana de tiempo.

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$$

$$x_1 = \textit{Temperatura}$$

$$x_2 = \textit{Presión}$$

$$x_3 = \textit{Masa}$$

$$x_4 = \textit{Sustentación}$$

$$x_5 = \textit{Resistencia}$$

$x_6 = \text{Consumo de combustible}$

$x_7 = \text{Empuje}$

$x_8 = \text{Tiempo}$

$x_9 = \text{Altitud}$

$x_{10} = \text{Velocidad}$

Siguiendo la línea de trabajo de la explotación del modelo de Trayectoria 4D, se trabajará con las variables que proporciona la Simulación de Monte Carlo desarrollada en Matlab en el anterior Entregable. Estas variables del vector estado, se irán modificando a medida que avance el desarrollo del modelo.

Para definir los estados de cada parámetro se utilizará la distribución normal entorno al valor ideal de la trayectoria 4D, definiendo, como en sistema, tres tasas de rendimiento o estados: óptimo, aceptable y degradado.

ESTADO	INTERVALO
ÓPTIMO	68.3 %
ACEPTABLE	27.3 %
DEGRADADO	4.4 %

**Ilustración 12: Tabla de intervalos**

Como ya se ha mencionado en la introducción teórica, estudio de las cadenas de Markov es reducible al estudio algebraico de las propiedades de las matrices de transición. Estas matrices de transición o probabilidades de estar y/o pasar de un estado a otro del sistema, serán calculadas a partir de los datos obtenidos de las simulaciones, con los márgenes definidos en Ilustraciones 12 y 13.

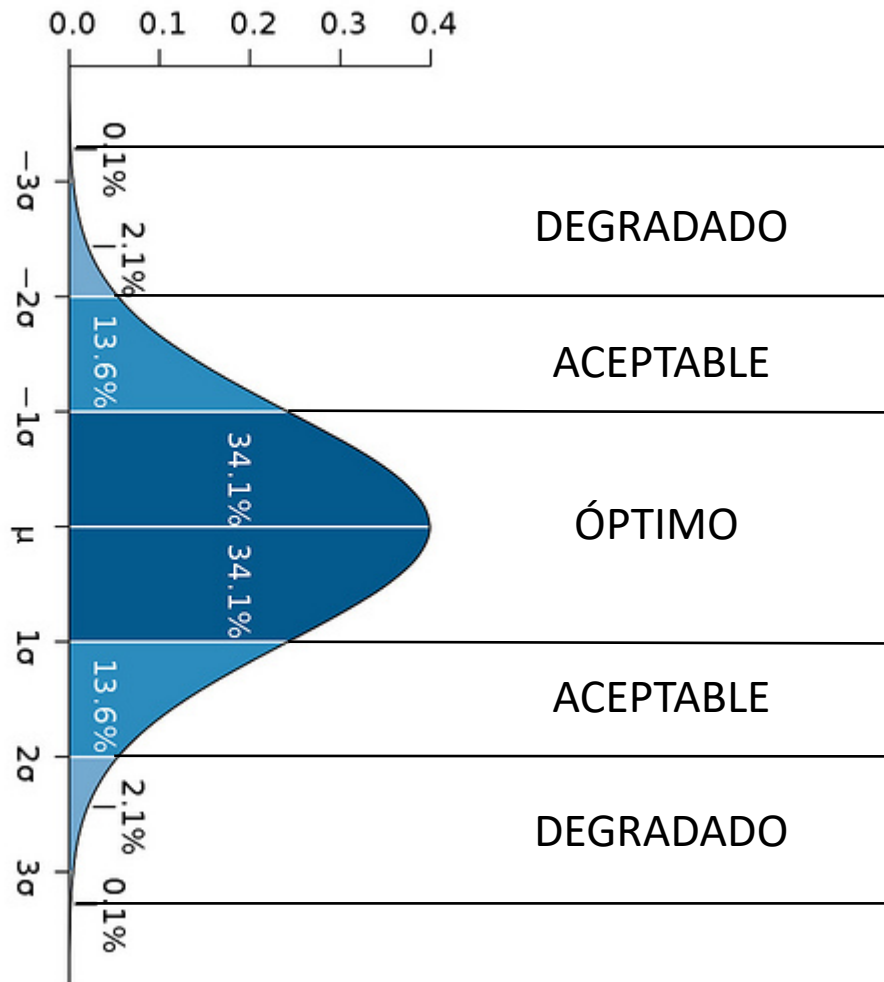


Ilustración 13: Distribución de los estados

## 6 CONCLUSIONES

---

Como se expuso en el anterior Entregable, la red bayesiana permite expresar de una manera gráfica y representativa las relaciones de causalidad entre los parámetros que intervienen en el modelo de predicción, para poder descartar aquellos cuya influencia es despreciable en la trayectoria final de la aeronave. Conocer las relaciones de causalidad, permite hacer un análisis inverso, es decir, fijando una ventana de paso, descubrir entre qué valores han de encontrarse las variables de entrada del modelo

La ampliación del modelo causal a todos los tramos del modelo de Trayectoria 4D construida, permite evaluar un punto de cada sección de la trayectoria a modo de muestra por cada cambio de actuación de la aeronave (vuelo estabilizado, cambio de nivel ascendente, vuelo estabilizado, cambio de nivel descendente, vuelo estabilizado), se tiene un estudio más completo que permite aumentar la fiabilidad de la red global, se ofrece una visión más global de la trayectoria pudiendo observar de una manera más pormenorizada cada característica de la trayectoria y se presenta una evolución de la trayectoria y sus variaciones de una forma más particularizada, conociendo cómo varía cada parámetro de un checkpoint al siguiente.

## 7 REFERENCIAS

Referencia bibliográfica	Descripción
[1]	BayesFusion, GeNle Modelos User Manual Version 2.1.1, 2017
[2]	A. Lisnianski y G. Levitin , Multi-state System Reliability, World Scientific , 2003
[3]	W. L. Xinglong Wang, Research on Air Traffic Control Automatic System Software Reliability Based on Markov Chain, ELSEVIER, 2012.
[4]	V. Mehta, S. Campbell, N. Underhill, R. DeLaura y K. Chandra, Markov Model for Benefits Analysis of Air Traffic Technologies.